Equation du transport, formulation au sens des moindres carrés espace-temps et principe du maximum

Jerome Pousin [(1)*], Khadidja Benmansour [(2)]

[1] *Université de Lyon ICJ INSA de Lyon UMR CNRS 5208, 20 Av. A. Einstein F-69100 Villeurbanne cedex. 1*
[2] *Université Abou-bekr Belkaid de Tlemcen Algérie 2*

[*] *Corresponding author : jerome.pousin@insa-lyon.fr*

Résumé - Abstract : Nous proposons une formulation au sens des moindres carrés espace-temps de l'équation du transport qui permet d'obtenir un principe du maximum pour une approximation avec un espace d'éléments finis de Lagrange quadrangulaires du premier ordre.

Mots clés - Key word : Moindres carrés espace-temps, Principe du maximum, Equation du Transport.

1 Formulation au sens des moindres carrés espace-temps de l'équation du transport

La motivation pour étudier cette question vient de l'imagerie dynamique ou du suivi d'image en général. L'équation du flot optique (voir par exemple [1]) qui est à la base de très nombreuses méthodes destimation ou de suivi, est une équation du transport pour le niveau de gris u servant a décrire l'image.

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u(x,t) + \big(v(x,t)/\nabla u(x,t)\big) = 0;\ \mathrm{dans}\,\Omega \times (0,1) = \mathrm{Q} \\ u(x,0) = \rho_0; \quad u(x,1) = \rho_1\,\mathrm{dans}\,\Omega. \end{array} \right. \tag{1}$$

Ici $\big(\,\cdot\,/\,\cdot\,\big)$ désigne le produit scalaire euclidien, v est la vitesse supposée régulière (C^1), ρ_0 et ρ_1 sont les conditions initiales et finales et sont données. Si nous ne considérons pas la condition finale, nous avons un équation du transport classique. Dans la suite de cet article nous ne considérons que l'équation classique du transport.

Notant $\tilde{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ et $\widetilde{\nabla}$ le gradient espace temps, nous notons ∂Q_- la partie entrante du bord de Q c'est-àdire les points du bord ou la normale n vérifie :$\big(\tilde{v}/n\big) < 0$. Définissons $\rho(x,t) = u(x,t) - (1-t)\rho_0(x)$, et

$$f = \partial_t(1-t)\rho_0(x) + \big(v(x,t)/\nabla(1-t)\rho_0(x)\big).$$

Une formulation au sens des moindres carrés espace-temps (voir [4] par exemple) pour le problème (1) lorsque la condition initiale a été relevée s'écrit : trouver $\rho \in H(\partial Q_-)$ vérifiant :

$$\int_Q \big(\tilde{v}/\widetilde{\nabla}\rho\big)\big(\tilde{v}/\widetilde{\nabla}\varphi\big)\,dxdt = \int_Q f\big(\tilde{v}/\widetilde{\nabla}\varphi\big)\,dxdt; \forall\varphi \in H(\partial Q_-); \tag{2}$$

où $H(\partial Q_-) = \{\varphi \in L^2(Q), \big(\tilde{v}/\widetilde{\nabla}\varphi\big) \in L^2(Q), \varphi = 0\,\mathrm{sur}\,\partial \mathrm{Q}_-\}$. Dans [2], il est démontré que le problème (2) est un problème bien posé dans l'espace de Sobolev anisotrope $H(\partial Q_-)$. De plus il est démontré que si la condition initiale ρ_0 est non négative, alors la solution ρ est non négative.

2 Approximation par une méthode d'éléments finis espace-temps

Pour l'approximation du problème (2) par des éléments finis de Lagranges quadrangulaires, et une méthode de marche en temps, nous renvoyons à [3] par exemple. Dans ce qui suit nous donnons un résultat

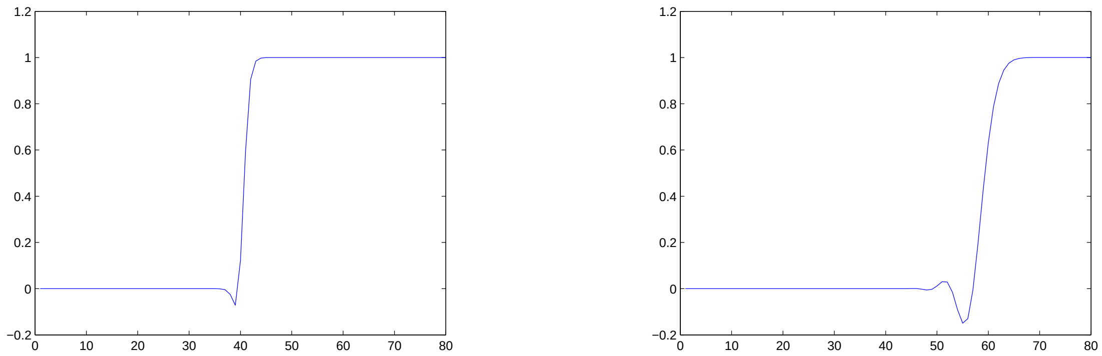

FIGURE 1 – solution moindres carrés après un pas de temps et après 20 pas de temps.

numérique lorsque $\Omega = (0,1)$, $v = 1$ et pour une condition initiale $\rho_0(x) = \frac{1}{2}(1 - \tanh(100x - 50))$, $\rho(0,t) = 0$ et $h = 1/80$ et avec un pas de temps $\tau = 1/80$.
Dans cet exposé je présenterai une formulation modifiée, qui permet de respecter le principe du maximum pour l'approximation du problème par une méthode d'éléments finis lorsque la pas h est suffisamment petit. Dans ce qui suit nous présentons les résultats de notre méthode sans modifier le pas d'espace.

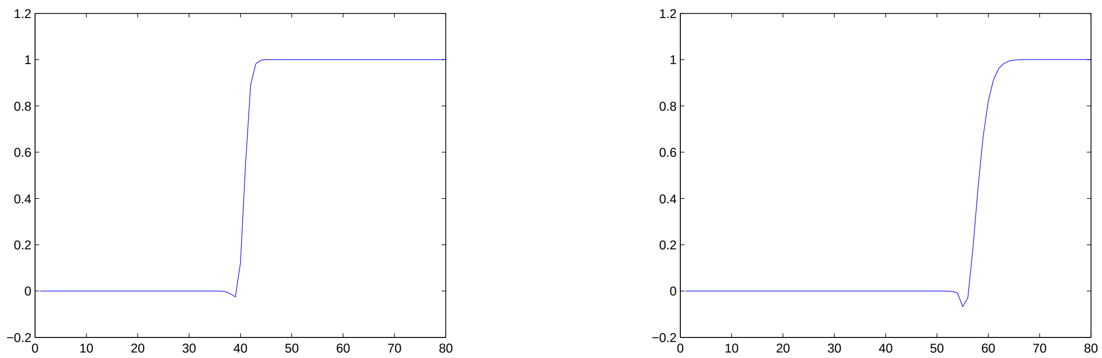

FIGURE 2 – solution moindres carrés modifiés après un pas de temps et après 20 pas de temps.

Conclusion :
Nous avons proposé une schéma qui permet de satisfaire le principe du maximum pour une formulation au sens des moindres carrés espace-temps approchées par une méthode d'éléments finis pour h suffisamment petit, mais qui pour h quelconque améliore nettement les résultats numériques.

Références

[1] G. Aubert, R. Deriche and P. Kornprobst, Computing optical flow problem via variational techniques. SIAM J. Appl. Math., 80, 156–182, (1999).

[2] O. Besson and J. Pousin, Solutions for linear conservation laws with velocity fields in L^∞. Arch. Rational Mech. Anal., 186, 159–175, (2007).

[3] O. Besson and G. de Montmollin, Space-time integrated least squares : a time marching approach. Int. J. Numer. Meth. Fluids, 44, 525–543, (2004).

[4] P.B. Bochev and M.D. Gunzburger, Least-Squares Finite Element Methods, volume 166, Applied Mathematical Sciences, Springer, 2009.
%bibitemDelhay07